Fonctions II

Représentation Graphique

On se place dans un repère donné du plan.

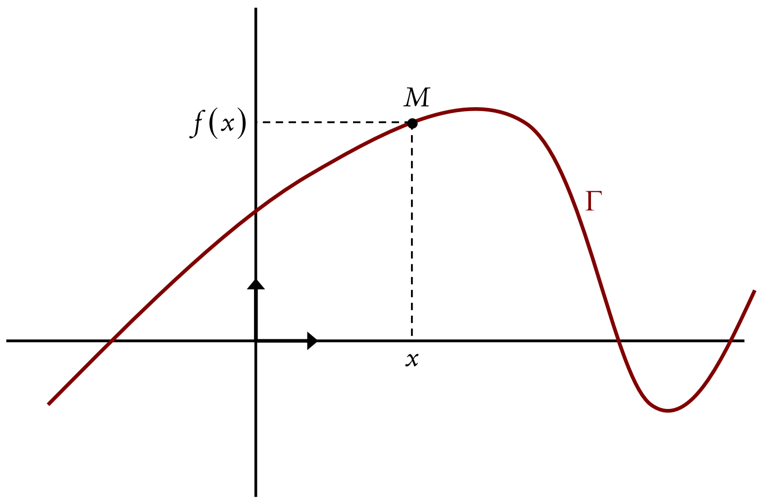
Il est recommandé de relire le chapitre Fonctions I.

I. Définition

DÉFINITION La **représentation graphique** d'une fonction est l'ensemble des points du plan dont l'ordonnée est l'image de l'abscisse (par cette fonction).

Autrement dit : soient f une fonction et Γ sa représentation graphique. Soit $M(x;y)$ un point du plan. On a :

$$\boxed{M(x;y)\in\Gamma \iff y=f(x)}$$



REMARQUES On dit aussi **courbe représentative** d'une fonction. Ou plus simplement, **courbe** d'une fonction.

La représentation graphique de f est la courbe d'équation $y=f(x)$.

On en déduit que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Les fonctions polynômes du second degré ont pour courbe une *parabole*. (Une **parabole** est l'ensemble des points équidistants d'une droite et d'un point donnés.)

Toute représentation graphique de fonction peut être vue comme courbe d'équation donnée, mais la réciproque n'est pas toujours vraie : pour qu'on puisse voir une figure comme une courbe de fonction, il faut que pour chaque abscisse, il n'y ait pas plus d'un point sur la courbe, car chaque nombre n'a qu'une image, par une fonction. Ainsi, un cercle ne peut pas être une courbe de fonction.

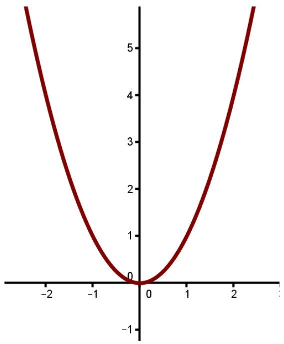
Γ : gamma, troisième lettre de l'alphabet grec, a donné le mot « gamme ». En minuscule : γ.

La représentation graphique d'une fonction n'est pas un *dessin* réalisé sur une feuille, mais une *figure* géométrique, donc un objet mathématique, par essence abstrait. Le dessin n'est que la « représentation de la représentation ». Lorsqu'on réalise ce dessin, on ne peut en général s'y prendre que *point par point*. On place le plus de points possible (en choisissant suffisamment de valeurs judicieusement réparties) puis on les joint à main levée.

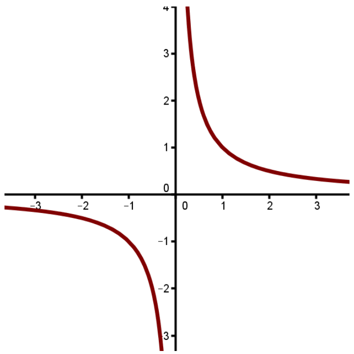
Il faut être capable de formuler correctement la définition, faute de quoi le lien ne sera pas solidement établi entre la fonction, objet plutôt algébrique, et sa représentation graphique, objet géométrique. Et si ce lien n'est pas établi, tout ce qui suit n'a aucun sens. Donc, cette définition est de très loin ce qui est le plus important dans ce chapitre.

EXEMPLES Courbes des fonctions usuelles :

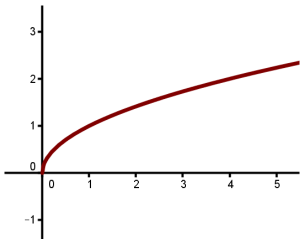
Fonction carré



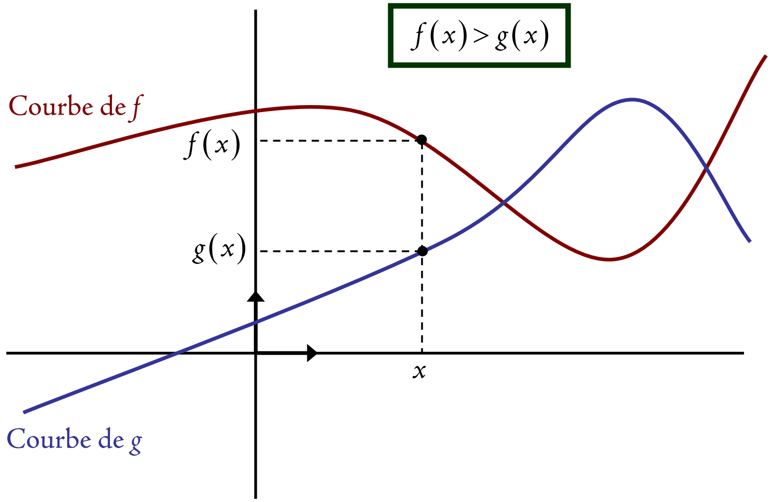
Fonction inverse

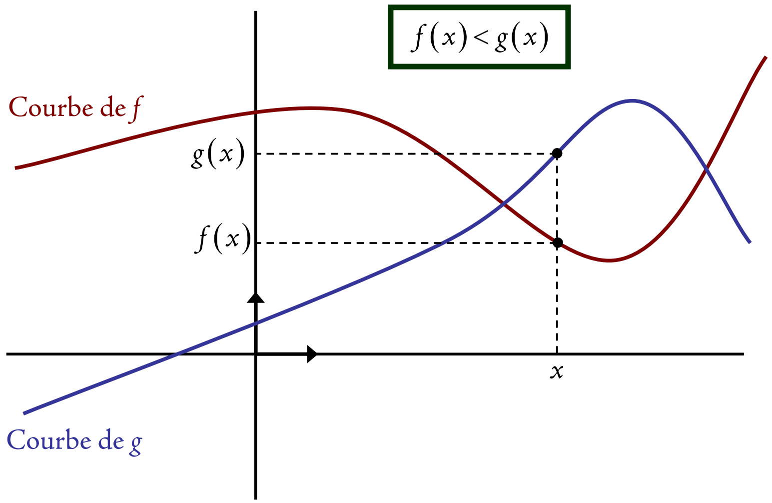


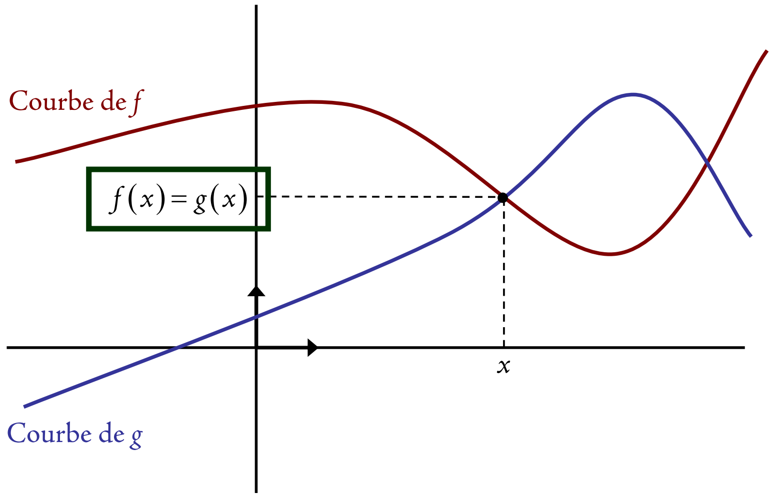
Fonction racine



II. ÉGALITÉS, INÉGALITÉS







III. Calculatrice graphique

Principe Puisque tracer une courbe point par point est une tâche répétitive, on peut la confier à une machine.

Précautions

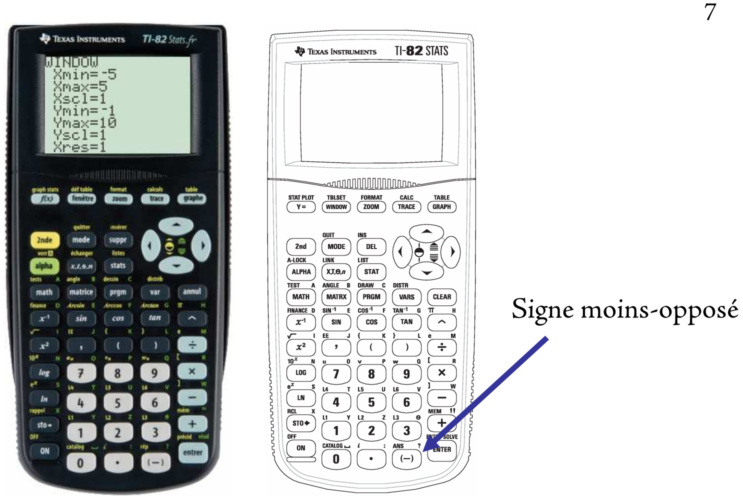
Afin d'éviter des erreurs intempestives, nous allons tout d'abord faire un peu le ménage dans les paramètres et options de la calculatrice :

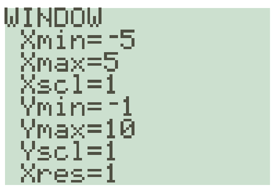
(mode) : griser toutes les options de gauche (notamment Fct), sauf à la 5ᵉ ligne : plutôt sélectionner « NonRelié ».

[format] (=(2nde)(zoom)) : sélectionner toutes les options de gauche.

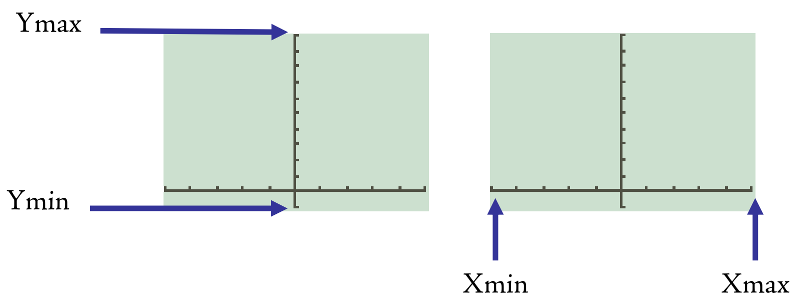
(f(x)) : avec (annul), effacer toutes les expressions de fonctions et avec (entrer), « dégriser » Graph1, Graph2, Graph3 (en haut de l'écran).

Fenêtre (fenêtre) : pour commencer, choisissons : Xmin=-5 ; Xmax=5 ; Xgrad=1 ; Ymin=-1 ; Ymax=10 ; Ygrad=1 ; Xrés=1. Attention, car la Texas distingue le « moins-opposé » du « moins-soustraction ». Ici, il s'agit du « moins-opposé », qui est entre parenthèses, sur une touche blanche située à gauche de « entrée ».





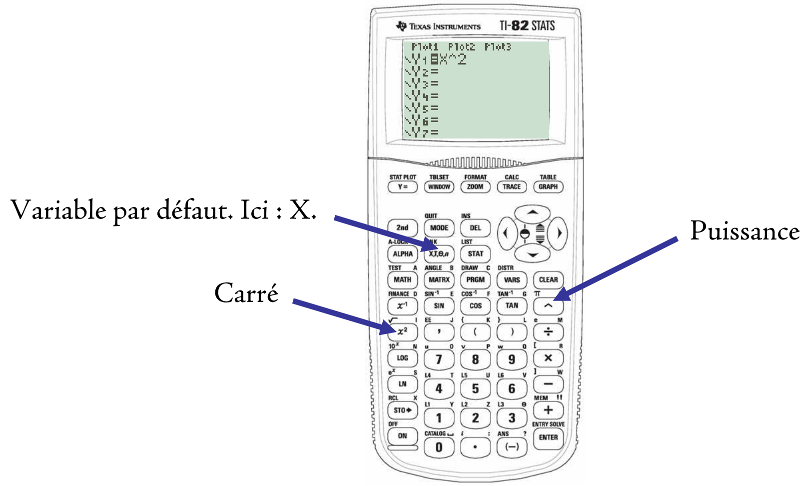
Les valeurs de Xmin, Xmax, Ymin et Ymax déterminent, dans le repère, la position des bords de l'écran, qui est comme une « fenêtre » ouverte sur le monde géométrique. Nous ne modifierons pas les valeurs des autres paramètres, que nous laisserons à 1.



Saisir une fonction

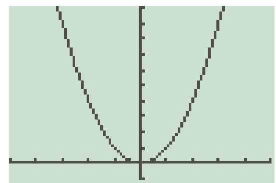
Imaginons par exemple que nous souhaitions entrer la *fonction carré* :

f(x) : Après « $\backslash Y_1$= », taper « X^2 » ou bien « X^2 ».



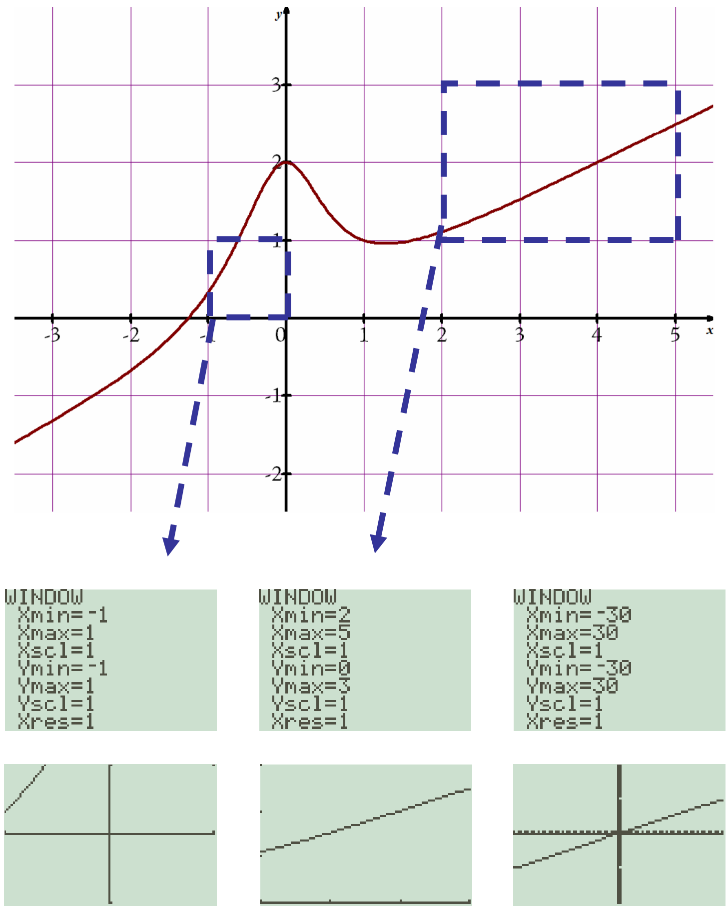
Tracer la courbe

Il reste à appuyer sur la touche graphe (ou trace).



Il sera très important de bien choisir les paramètres de la « fenêtre ». Souvent, il faudra s'y reprendre à plusieurs fois pour avoir une représentation satisfaisante. Prenons par exemple le cas de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^3+2}{2x^2+1}$

Voici des exemples de tracés de la courbe de cette fonction avec des « fenêtres » mal choisies :



(Vue de trop loin)

Sur ordinateur

Pour tracer des courbes sur PC, vous pouvez par exemple utiliser le logiciel gratuit *Sine Qua Non*.

IV. Symétries

Fonctions paires

Dans un repère orthogonal, la courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

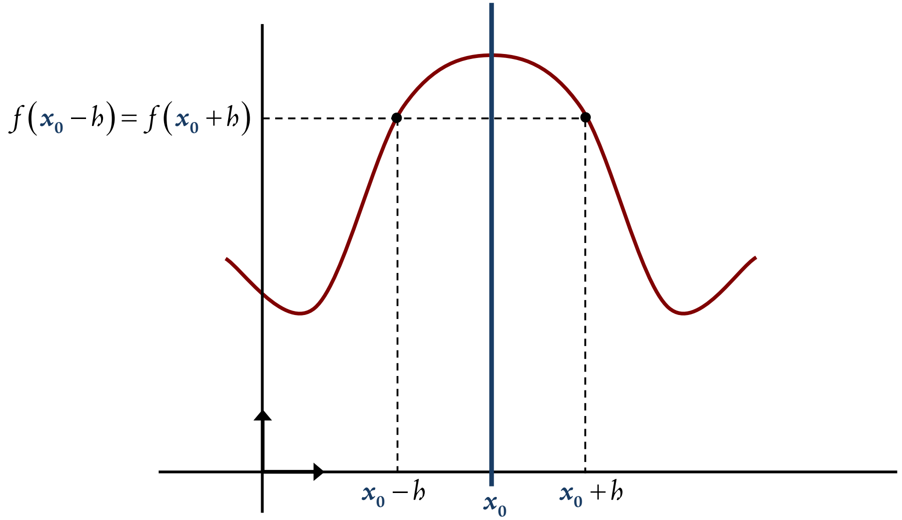
Généralisation

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et x_0 un réel donné.

Dans un repère orthogonal, la courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = x_0$ si, et seulement si :

$$\forall h \in \mathbb{R} ; f(x_0 + h) = f(x_0 - h)$$

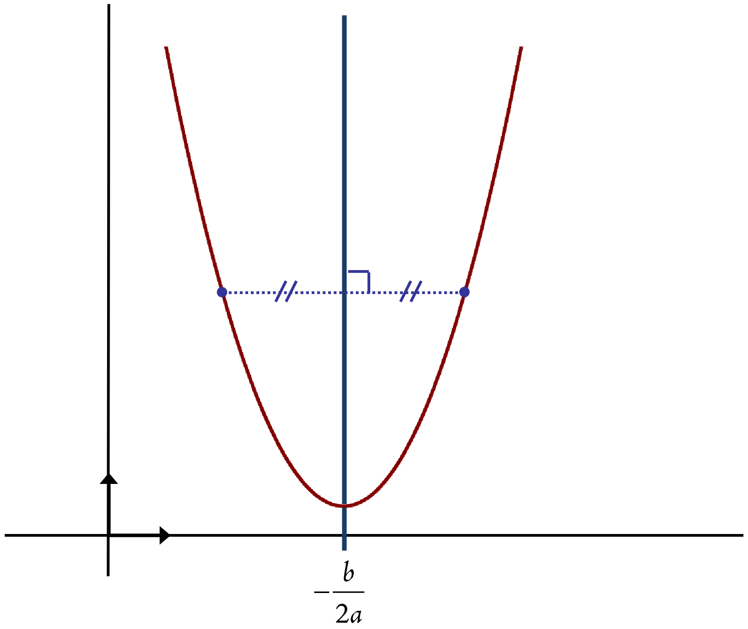
DÉMONSTRATION 1 : voir V.



FONCTIONS POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b et c trois réels, avec $a \neq 0$. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

La courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.



DÉMONSTRATION

Quel que soit $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a}-h\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}-h\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}-h\right)+c \\ &= a\left(\frac{b^2}{4a^2}+2\frac{bh}{2a}+h^2\right)-\frac{b^2}{2a}-bh \\ &= \frac{b^2}{4a}+bh+ah^2-\frac{b^2}{2a}-bh \\ &= ah^2-\frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Remarquons que cette dernière expression n'est pas modifiée lorsqu'on change h en son opposé :

$$f\left(-\frac{b}{2a}-(-h)\right) = a(-h)^2 - \frac{b^2}{4a} = ah^2 - \frac{b^2}{4a}$$

Donc : $f\left(-\dfrac{b}{2a}-h\right) = f\left(-\dfrac{b}{2a}+h\right)$.

FONCTIONS IMPAIRES

La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

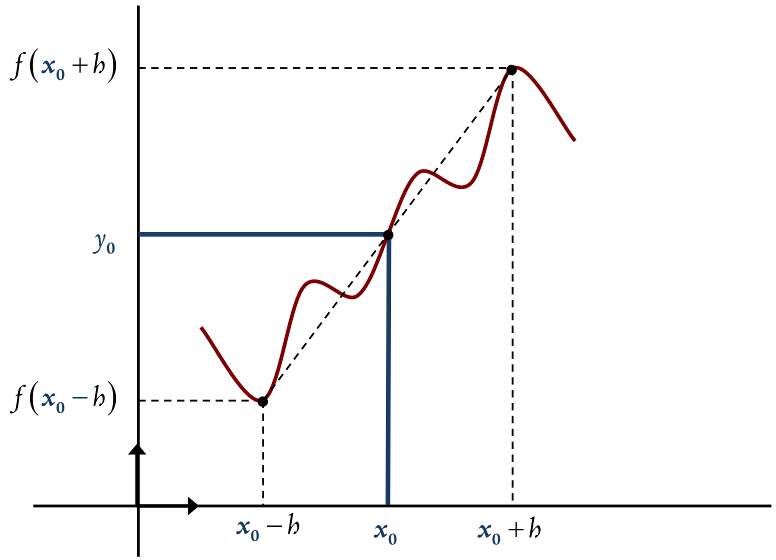
GÉNÉRALISATION

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\Omega(x_0 ; y_0)$ un point donné.

La courbe de f est symétrique par rapport Ω si, et seulement si :

$$\forall h \in \mathbb{R}; \quad \frac{f(x_0-h)+f(x_0+h)}{2} = y_0$$

DÉMONSTRATION 2 : voir V.



REMARQUES Dans le cas où l'ensemble de définition de *f* n'est pas $\mathbb{R}$, il faut d'abord, pour que la courbe soit symétrique par rapport à la droite d'équation $x = x_0$ ou par rapport à $\Omega(x_0; y_0)$, que son ensemble de définition D soit lui-même « symétrique par rapport à x_0 », c'est-à-dire qu'on ait : $\forall h \in \mathbb{R}$; si $x_0 - h \in D$, alors $x_0 + h \in D$.

Ω, lu « oméga », est la dernière lettre de l'alphabet grec. En minuscule, on l'écrit ω.

V. DÉMONSTRATIONS

Les démonstrations qui suivent ont été mises à part car elles ne présentent pas un grand intérêt. Leur lecture est facultative.

DÉMONSTRATION 1

Notons Γ la courbe de *f*. Notons Δ la droite d'équation $x = x_0$.

Supposons que, $\forall h \in \mathbb{R}; f(x_0 + h) = f(x_0 - h)$

Soit $M(x; y) \in \Gamma$. Démontrons que $M'(x'; y')$, symétrique de M par rapport à Δ, appartient aussi à Γ.

On pose : $h = x_0 - x$. On a donc : $x = x_0 - h$.

Notons H le projeté orthogonal de M sur Δ. Le repère étant orthogonal, on a : $H(x_0; y)$. Or, M' étant le symétrique de M par rapport à Δ, on a : $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HM'}$.

$\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix} x_0 - x \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{HM'}\begin{pmatrix} x' - x_0 \\ y' - y \end{pmatrix}$.

Puisque $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HM'}$, on a : $\begin{cases} h = x' - x_0 \\ y' - y = 0 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} x' = x_0 + h \\ y' = y \end{cases}$.

En outre, puisque $M \in \Gamma$, $y = f(x)$. Donc : $\begin{cases} x' = x_0 + h \\ y' = f(x_0 - h) \end{cases}$.

Or $f(x_0 + h) = f(x_0 - h)$, donc : $\begin{cases} x' = x_0 + h \\ y' = f(x_0 + h) \end{cases}$

Donc l'ordonnée de M' est l'image de son abscisse, par *f*.

Donc $M' \in \Gamma$.

Réciproquement, supposons que Γ soit symétrique par rapport à Δ.

Soit $h \in \mathbb{R}$. Démontrons que $f(x_0 + h) = f(x_0 - h)$.

Soit $M\left(x_0-h;f\left(x_0-h\right)\right)$. $M\in\Gamma$ car son ordonnée est l'image de son abscisse (par *f*).

Soit M', le symétrique de M par rapport à Δ. Par un raisonnement similaire à celui tenu dans le paragraphe précédent, on prouve que $M'\left(x_0+h;f\left(x_0-h\right)\right)$. Or $M'\in\Gamma$, donc son ordonnée est l'image de son abscisse. L'ordonnée de M' est donc $f\left(x_0+h\right)$. Donc $f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0-h\right)$.

DÉMONSTRATION 2

Notons Γ la courbe de *f*.

Supposons que, $\forall h\in\mathbb{R};\quad \dfrac{f\left(x_0-h\right)+f\left(x_0+h\right)}{2}=y_0$

Soit $M\left(x;y\right)\in\Gamma$. Démontrons que $M'\left(x';y'\right)$, symétrique de M par rapport à Ω, appartient aussi à Γ.

On pose : $h=x_0-x$. On a donc : $x=x_0-h$.

On a : $\overrightarrow{M\Omega}=\overrightarrow{\Omega M'}$.

Or $\overrightarrow{M\Omega}\begin{pmatrix}x_0-x\\y_0-y\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{M\Omega}\begin{pmatrix}h\\y_0-y\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{\Omega M'}\begin{pmatrix}x'-x_0\\y'-y_0\end{pmatrix}$.

Puisque $\overrightarrow{M\Omega}=\overrightarrow{\Omega M'}$, on a : $\begin{cases}h=x'-x_0\\y_0-y=y'-y_0\end{cases}$, donc : $\begin{cases}x'=x_0+h\\y_0=\dfrac{y+y'}{2}\end{cases}$

En outre, puisque $M\in\Gamma$, $y=f\left(x\right)$.

Donc : $\begin{cases}x'=x_0+h\\y_0=\dfrac{f\left(x_0-h\right)+y'}{2}\end{cases}$.

Or $\dfrac{f\left(x_0-h\right)+f\left(x_0+h\right)}{2}=y_0$, donc :

$$\begin{cases}x'=x_0+h\\\dfrac{f\left(x_0-h\right)+f\left(x_0+h\right)}{2}=\dfrac{f\left(x_0-h\right)+y'}{2}\end{cases}$$

On en déduit : $\begin{cases}x'=x_0+h\\f\left(x_0+h\right)=y'\end{cases}$

Donc l'ordonnée de M' est l'image de son abscisse, par *f*.

Donc $M'\in\Gamma$.

Réciproquement, supposons que Γ soit symétrique par rapport à Ω.

Soit $h\in\mathbb{R}$. Démontrons que $\dfrac{f\left(x_0-h\right)+f\left(x_0+h\right)}{2}=y_0$.

Soit $M\left(x_0-h;f\left(x_0-h\right)\right)$. $M\in\Gamma$ car son ordonnée est l'image de son abscisse (par *f*).

Soit M', le symétrique de M par rapport à Ω.

Par un raisonnement similaire à celui tenu dans le paragraphe précédent, on prouve que $M'\left(x_0+h\ ;\ 2y_0-f\left(x_0-h\right)\right)$. Or $M'\in\Gamma$, donc son ordonnée est l'image de son abscisse. L'ordonnée de M' est donc $f\left(x_0+h\right)$. Donc $f\left(x_0+h\right)=2y_0-f\left(x_0-h\right)$.

Donc $y_0=\dfrac{f\left(x_0-h\right)+f\left(x_0+h\right)}{2}$.